ПОРАДИ УЧАСНИКУ ОЛІМПІАДИ

1. Уважно прочитай умови задач і з′ясуй порядок, у якому ти будеш їх виконувати. Краще починати з більш легких, які знаходяться на початку.

2. Якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не обирай найкращий для себе, а звернись за консультацією до членів журі.

3. Якщо не зрозуміло, чи правильно якесь твердження, то спробуй його довести або спростити.

4. Не зациклюйся на одній задачі. Якщо не має ідеї розв′язання, то задачу краще на деякий час залишити.

5. Якщо задача розв′язана, то одразу ж оформляй рішення. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших завдань.

6. Кожний крок необхідно записувати. Громіздкі рішення краще записувати у вигляді декількох тверджень.

7. Перед тим, як здати роботу, уважно перечитай її « очима членів журі» - зможуть вони в ній розібратися.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ РОБІТ

Ціль математичної олімпіади – виявити учнів, які здатні нестандартно ( але при цьому вірно) думати, здатних використовувати набуті у школі знання при розв′язанні « нешкільних» задач. Тому часто при перевірці робіт дрібні помилки або описки не враховуються.

Традиційною є така система оцінювання:

+ ( 15 балів) – задача розв′язана правильно;

+• ( 13 балів) - задача розв′язана, але є деякі недоліки;

± ( 10 балів) – задача в цілому розв′язана ( недоліки у рішенні легко виправити);

+/ ( 7 балів) - задача розв′язана « наполовину», тобто є прогрес, но повне рішення потребує інших ідей;

-+ ( 5 балів) – задача не розв′язана, але підхід до її розв′язання правильний;

-• ( 2 бали) - задача розв′язана неправильно, але є деякі вірні твердження;

- ( 0 балів) – задача не розв′язувалась, або рішення не записано;

! ( 1 додатковий бал) – рішення містить яркі ідеї.

При цьому часто зараховуються тільки ті задачі, рішення яких оцінено +, + • , ± , +/ .

УСЛОВИЯ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ, 6 КЛАСС

2001 год

1. Можно ли в квадрате 4 x 4 расставить 10 минусов так, чтобы в каждой строке было четное число минусов, а в каждом столбце — нечетное число? ( 15 баллов)

2. Винни - Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 52 банана, причем каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни - Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 33 банана. Кролик съел бананов больше, чем Сова. Сколько бананов съел каждый? ( 15 баллов)

3. Юра задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, затем полученное число умножил на 7, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21 Какое число задумал Юра? ( 20 баллов)

4. Каждый из трех игроков записывает 100 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычеркивают из всех списков. Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 54 слова, у второго — 75 слов, а у третьего — 80 слов? ( 20 баллов)

5. Расшифруйте два ребуса по двум действиям, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры (в обоих примерах).

1) АБВ 2) АБВ

+ ВВ × ВВ

ААБ АБВ

АБВ

АГАВ

Придумайте сами два ребуса (и укажите ответы). ( 30 баллов)

2003 год

1. Банк платит 12%\_годовых, В какую сумму превратится вклад в 6000 грн: через 4 месяца; через 8 месяцев: через 3 года? ( 15 б.)

2. Как от ленты длиной 2/3 м отрезать 0,5 м, не пользуясь никакими измерительными приборами? ( 15 б.)

3. Площадь прямоугольника 576 см2, ширина его 18 см. Найдите площадь такого квадрата, у которого периметр равен периметру прямоугольника. ( 20 б.)

4. Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод? ( 20 б.)

5. Пусть *k* – любое натуральное число. Докажите, что 7 + 72 + 73 + 74 + … + 74k делится на 400. ( 30 б.)

2004 год

1. Четверо друзей решили купить вместе настольную игру. Первый внес половину суммы, вносимой остальными; второй - треть суммы, вносимой остальными; третий - четверть суммы, вносимой остальными, а четвертый внес 1 гривню 30 копеек. Сколько стоит игра и сколько денег внес каждый? ( 15 б.)

2. Найдите сумму натуральных чисел от 1 до 99. ( 15 б.)

3. Доказать, что из любых трех натуральных чисел можно найти два, сумма которых делится на два. (20 б.)

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства 15*х* < 460. ( 20 б.)

5. В записи 88888888 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения (плюс) так, чтобы получить выражение, значение которого равно 1000. (30 б.)

2005 год

1. Даны два числа. Какое из чисел больше и на сколько, если 5% от первого числа равно 15, а 8% от второго равно 16? ( 15 б.)

2. Жилая площадь квартиры, состоящей из двух комнат, равна 47,5 м2. Площадь одной комнаты составляет  площади другой. Найти площадь каждой комнаты. ( 15 б.)

3. Найдите число, которое делится на 5 без остатка, а при делении на 2, 3 и 4 дает в остатке 1. ( 20 б.)

4. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить из 320 орехов, 240 конфет и 200 пряников? Сколько конфет, орехов и пряников будет в каждом пакете? ( 20 б.)

5. Имеется 8 кг фасоли и чашечные весы без гирь. Как отвесить с их помощью 3 кг фасоли? ( 30 б.)

2006 год

1.Некоторый товар стоил 500 гривен. Затем цену на него увеличили на 10 %, а затем уменьшили на 10 %. Какой стала цена в итоге?

( 15 б.)

2. В 9 часов утра со станции А отправился пассажирский поезд, а вслед за ним в 11 часов с той же станции отправился скорый поезд. На каком расстоянии от станции А пассажирскому поезду надо будет пропустить скорый, если скорость пассажирского поезда 54 км/ч, а скорого 72 км/ч? ( 15 б.)

3. Наименьшее общее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а наибольший общий делитель их равен 18. Найти эти числа. ( 20 б.)

4. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге? ( 20 б.)

5. По кругу написано 2003 натуральных числа. Докажите, что найдутся два соседних, сумма которых четна. ( 30 б.)

2007 год

1.Отец и сын решили измерить шагами расстояние между двумя деревьями. Длина шага отца 70 см, а сына 56 см. Найти расстояние между деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз.

( 15 б.)

2 Сколько воды надо добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12 - % ный раствор этой соли?

( 15 б.)

3. Доказать, что сумма двух последовательных нечетных чисел делится нацело на 4. ( 20 б.)

4. На доске записано число 23. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Что окажется на доске через час? ( 20 б. )

5. В клетчатом квадрате 9×9 закрашено 19 клеток. Докажите, что либо найдутся две закрашенные клетки, имеющие общую сторону, либо найдется незакрашенная клетка, к сторонам которой примыкают не менее двух закрашенных. ( 30 б.)

2008 год

1. Даны два числа. Какое из чисел больше и на сколько, если 5 % от первого числа равно 15, а 8 % от второго равно 16? ( 15 б.)

2. В 9 часов утра со станции А отправился пассажирский поезд, а вслед за ним в 11 часов с той же станции отправился скорый поезд. На каком расстоянии от станции А пассажирскому поезду надо будет пропустить скорый, если скорость пассажирского поезда 54 км/ч, а скорого 72 км/ч? ( 15 б.)

3. Доказать, что сумма двух последовательных нечетных чисел делится нацело на 4. ( 20 б.)

4. Какое наибольшее число подарков можно составить из 320 орехов, 240 конфет и 200 пряников? Сколько конфет, орехов и пряников будет в каждом из них? ( 20 б.)

5. По кругу написано 2003 натуральных числа. Докажите, что найдутся два соседних, сумма которых четна. ( 30 б.)

УСЛОВИЯ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ, 7 КЛАСС

2001 год

1. Вдоль забора растут 4 куста малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 125 ягод? (15 б.) (15 б.)

2. Как разрезать квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см? (15 б.) (15 6.)

3. На складе стеклотары могут храниться банки из - под консервированных овощей по 0,5 л, 0,7 л и 1 л. Сейчас на складе имеется 2500 банок общей вместимостью 1998 л. Докажите, что  
на складе есть хотя бы одна пол - литровая банка. (20 б) (20 б.)

4. Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на 3? ( 30 б.) (30 б.)

5. Прямоугольник составлен из квадратов, как на рисунке. Сторона наименьшего квадрата равна 4. Какие стороны у прямоугольника? (20б)

2003 год

1. Решите уравнение: ⎜ 1 - 2*х* ⎜ = З*х* - 2. ( 15 б.) (15 б.)

2. Электропоезд проехал мимо светофора за 5 секунд, а мимо платформы длиной 150 м – за 15 секунд. Какова длина электропоезда и его скорость? (15 б.)

3. Найдите целые *х* и *у,* удовлетворяющие уравнению *х*2+ 2003 = у2.

(20 б.)

4. Разрежьте прямоугольник 9 × 16 на две части, из которых можно сложить квадрат. ( 30 б)

5.Каждую грань кубика разрезали на 4 квадратика, и каждый квадратик покрасили в один из трёх цветов: синий, жёлтый или красный, так чтобы любые два соседних (через сторону)  
квадратика оказались разного цвета. Докажите, что синих квадратиков не меньше 8. ( 20 б.)

2004 год

1. Если некоторое число увеличить на 15 %, то получится 207. На сколько % надо уменьшить это число, чтобы получить 126? ( 15 б.)

2. Какая дробь больше или ? ( 15 б.)

3. Найти наименьшее положительное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7 и 11 дает в остатке 1. ( 20 б.)

4. Среди точек прямой *l* найдите такую точку, сумма расстояний от которой до двух данных точек M и N будет наименьшей. ( 20 б.)

5. Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найдите это число. ( 30 б.)

2005 год

1. Даны три точки М ( - 2;3), В (- 2; 6),А ( 6;6). Постройте точку К, являющуюся вершиной прямоугольника МВАК. Найдите площадь этого прямоугольника. ( 15 б.)

2. Число *а* составляет 80 % числа *в*, а число *с* составляет 140% числа *в*. Найдите числа *а ,в ,с,* если известно, что с больше а на 72. ( 15 б.)

3. Решите уравнение: ⎜ 1 - 2*х* ⎜ = З*х* - 2. ( 20 б.)

4. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая с пятой, третья с шестой. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.

( 20 б.)

5. Каждые два из шести городов соединены линией воздушного беспересадочного сообщения. Сколько всего линий воздушного сообщения? ( 30 б.)

2006 год

1. Из корзины взяли 3 яблока, затем треть от оставшихся и затем еще 3 яблока, после чего в корзине осталась половина от первоначального числа яблок. Сколько яблок было в корзине первоначально? ( 15 б)

2. Белка за 20 минут приносит орех в дупло. Какое расстояние она при этом пробегает, если без ореха белка бежит со скоростью 5 м/с, и с орехом 3 м/с? ( 15 б.)

3. На доске написано число 321321321321. Какие цифры необходимо стереть, чтобы получить возможное наибольшее число, делящееся на 9? ( 20 б.)

4. Докажите, что значение выражения 967 – 225 – 486 кратно 10.

( 20 б.)

5. На столе лежат 18 карандашей. Двое учеников берут по очереди один, два или три карандаша. Проигрывает тот, кто вынужден будет взять последний карандаш. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? ( 30 б.)

2007 год

1. Батон стоил 1,5 грн. Цена на него повышалась 2 раза на 5 % и на 6 %, а потом сразу снизилась на 11 %. Изменилась ли цена батона в гривнах? ( 15 б.)

2. Сколько существует натуральных трехзначных чисел, которые при делении на 8 дают остаток 3? ( 15 б.)

3. Из 100 учащихся лицея 28 изучают английский, 30 – немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - французский и английский, 5 – немецкий и французский, 3 – все три языка. Сколько учеников изучают только английский, только французский, только немецкий? Сколько учащихся не изучают ни одного языка? ( 20 б)

4.Ученику прислали 20 задач. За каждую решенную задачу давали 8 баллов, за неправильно решенную - снимали 5 баллов, за задачу, за которую ученик не брался, 0 баллов. Сколько задач пробовал решить ученик, если он набрал 13 баллов? ( 20 б.)

5. При каких натуральных значениях *а* уравнение *ах* = *а* + *х* + 1 имеет четные корни? ( 30 б.)

2008 год

1. Даны три точки М ( - 2;3), В (- 2; 6),А ( 6;6). Постройте точку К, являющуюся вершиной прямоугольника МВАК. Найдите площадь этого прямоугольника. ( 15 б.)

2. Белка за 20 минут приносит орех в дупло. Какое расстояние она при этом пробегает, если без ореха белка бежит со скоростью 5 м/с, и с орехом 3 м/с? ( 15 б.)

3. Из 100 учащихся лицея 28 изучают английский, 30 – немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - французский и английский, 5 – немецкий и французский, 3 – все три языка. Сколько учеников изучают только английский, только французский, только немецкий? Сколько учащихся не изучают ни одного языка? ( 20 б)

4. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая с пятой, третья с шестой. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.

( 20 б.)

5. На столе лежат 18 карандашей. Двое учеников берут по очереди один, два или три карандаша. Проигрывает тот, кто вынужден будет взять последний карандаш. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? ( 30 б.)

УСЛОВИЯ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ, 8 КЛАСС

2001 год

1. В выпуклом четырёхугольнике АВСD АВ = ВС, СD = D А. Точки К, L, М, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника KLMN равны, то есть KM = LN. (15 б.)

2. Что больше: 12723 или 51318? (15 б.)

3. Сколько существует 11 - значных чисел, делящихся на 9, в десятичной записи которых встречаются только цифры 0 и 5?

(20 б.)

4.Шашка стоит в левом нижнем углу шахматной доски размера 4 × 4. За один ход она может подвинуться на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каких клеток она может достичь, побывав перед этим ровно по одному разу на каждой из остальных клеток? (20 б.)

5.Существуют ли натуральные числа *а, b, с,* что:

а)(*а* + *b*)(*b* + *с*)(*с* + *а*) = 140;

б) (*а* + *b*)(*b* + *с*)(*с* + *а*) = 380? (30 б.)

2003 год

1. Разложить на множители: *х*8 + *х*4 - 2. (15 б.)

2. При каком значении *т* прямые *у = -* 4*x* + *т* и *у* = *2х* - 3 пересекаются на оси ординат?

( 15 б. )

3. Решите в натуральных числах уравнение: *ху - Зх + 5у* = 25.

(20 б.)

4. Точка В - середина основания АС равнобедренного треугольника АВС. Точка Е-основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону ВС. Отрезки АЕ и ВD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков длиннее: ВFили ВЕ? (20 б.)

5. Докажите неравенство:

1 — *х* + *х*4 –*х*9 + *х*16 - *х*25 + *х*36 - *х*49 + *х*64 - *х*81 + *х*100 > 0. ( 30 б.)

( 30 б.)

2004 год

1. Дима и Вова вышли одновременно из дома в школу. У Димы шаг был на 20% короче, чем у Вовы, но зато он успевал делать на 20% больше шагов за одно и то же время, чем Вова. Кто из них пришёл раньше в школу? (15 б.)

2. Доказать, что число *а*3 – *а* при любом натуральном *а* делится на 6.

(15 б.)

3. Найти сумму коэффициентов многочлена, полученного при раскрытии скобок и приведении подобных членов в выражении

(*х*2 - З*х* + 3)2004. (20 б.)

4. Доказать, что треугольник, в котором центры описанной и вписанной окружностей совпадают, равносторонний. (20 б.)

5. Докажите, что

( 30 б.)

2005 год

1. Когда турист прошел 1 км и половину остатка, то ему осталось пройти всего пути и ещё 1 км. Определите весь путь. ( 15 б.)

2. Что больше 515 или 323? ( 15 б.)

3. Решите уравнение ⎜2 ⎜*х* - 1⎜- 3⎜= 5 ( 20 б.)

4. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел обязательно делится на 9. ( 20 б.)

5. Сеть метро имеет на каждой линии не менее четырех станций, из них не более трех пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не пересекается более двух линий. Какое наибольшее число линий имеет такая сеть, если с любой станции на любую можно попасть, сделав не больше двух пересадок?

( 30 б.)

2006 год

1. Решите уравнение - *х* ( 0,6*х* + ) + 0,3 ( *х* + 0,4 ) = 0

( 15 б. )

2. Катер прошел по течению 90 км за некоторое время. За то же время он прошел бы против течения 70 км. Какое расстояние за это время проплывет плот?

( 15 б.)

3. В треугольнике АВС проведены биссектрисы углов А и В, угол между ними равен 125°. Найти ∠ С.

( 20 б.)

4. Что больше 12723 или 51318? ( 20 б.)

5. На плоскости произвольно расположены шесть точек ( никакие три из них не лежат на одной прямой). Каждые две точки соединены отрезком или красного, или синего цвета. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в данных точках, все стороны которого имеют один цвет. ( 30 б.)

2007 год

1. Доказать, что выражение ( *а* – *в*)(*а* – *в* – 6) + 9 неотрицательно при любых *а* и *в*. ( 15 б.)

2. В треугольнике АВС биссектриса из вершины А, высота из вершины В и серединный перпендикуляр к стороне АВ пересекаются в одной точке. Найдите величину угла А. ( 15 б. )

3. Найти, через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую? ( 20 б.)

4. Сумма трех целых чисел делится на 6. Доказать, что и сумма кубов этих чисел делится на 6. ( 20 б.)

5. Доказать, что в любом шестидесятизначном числе, десятичная запись которого не содержит нулей, можно зачеркнуть несколько цифр так, что получившееся в результате этого число будет делиться на 1001. ( 30 б.)

2008 год

1. Когда турист прошел 1 км и половину остатка, то ему осталось пройти всего пути и ещё 1 км. Определите весь путь. ( 15 б.)

2. В треугольнике АВС биссектриса из вершины А, высота из вершины В и серединный перпендикуляр к стороне АВ пересекаются в одной точке. Найдите величину угла А. ( 15 б. )

3. Решите уравнение ⎜2 ⎜*х* - 1⎜- 3⎜= 5 ( 20 б.)

4. Сумма трех целых чисел делится на 6. Доказать, что и сумма кубов этих чисел делится на 6. ( 20 б.)

5. На плоскости произвольно расположены шесть точек ( никакие три из них не лежат на одной прямой). Каждые две точки соединены отрезком или красного, или синего цвета. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в данных точках, все стороны которого имеют один цвет. ( 30 б.)

УСЛОВИЯ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ, 9 КЛАСС

2001 год

1. Решите систему:  ( 15 б.)

2. Даны два числа: А = 2100 ⋅ 3200 + 260 ⋅ 1330 и В = 260 ⋅ 4360. Верно ли, что А = В? ( 15 б.)

3. На основании АС равнобедренного треугольника АВС (АВ = ВС) отмечена точка М. На продолжении АС за точку С отмечена точка N. Причём АМ = CN. Докажите, что АВ + ВС < МВ + BN. ( 20 б.)

4. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон. ( 20 б.)

5. На доске записаны натуральные числа от 1 до 2001. Разрешается заменить любые два числа модулем их разности. После 2000 таких операций остаётся одно число. Может ли это быть 0? ( 30 б.)

2003 год

1. Сократите дробь:  ( 15 б.)

2. Решите уравнение:  ( 15 б.)

3. Пусть ⏐*х*⏐< 1 и ⏐*у*⏐< 1. Докажите, что  ( 20 б.)

4. На столе лежит куча из 1001 камня. Из неё выкладывают камень и делят кучу на две (не обязательно равные). Затем из любой кучи, содержащей более двух камней, снова выкидывают камень и делят на две и т. д. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, содержащие по 3 камня? ( 20 б.)

5. В правильном треугольнике АВС выбрали точку М и опустили из неё перпендикуляры МА1, МВ1, МС1 на стороны ВС, АС, АВ соответственно. Докажите, что А1В + В1С + С1А =

АВ1 + ВС1 + СА1. (30 б.)

2004 год

1. Найти наименьшее целое *х*, удовлетворяющее неравенству  ( 15 б.)

2. Корни уравнения *х*2 + *ах* + 1 = *b* являются натуральными числами. Доказать, что *а*2 + *b*2 – составное число. ( 15 б.)

3. Доказать, что многочлен 1 + *х* + *х*2 + … + *х*93 + *х*94 + *х*95 делится на многочлен 1 + *х*32 + *х*64. ( 20 б.)

4. Дан остроугольный треугольник АВС. Окружность с центром на стороне ВС проходит через вершины В и С и пересекает стороны АВ и АС в точках D и Е соответственно. Оказалось, что AD = AE. Доказать, что треугольник АВС равнобедренный. ( 20 б.)

5. Длины сторон треугольника – последовательные целые числа, не меньше 3. Доказать, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит её на отрезки, разность которых равна 4. ( 30 б.)

2005 год

1. Докажите равенство:  ( 15 б.)

2. Разложите многочлен *х*8 + *х*4 – 2 на множители. ( 15 б.)

3. Найдите два числа, если их разность равна 66, а наименьшее общее кратное равно 360. ( 20 б.)

4. Пусть ВВ1 и СС1 – высоты остроугольного треугольника АВС с углом А = 30°, В2 и С2 – середины сторон АС и АВ соответственно. Докажите, что отрезки В1С2 и В2С1 перпендикулярны. (20 б.)

5. За пять лет обучения студент сдал 31 экзамен, причём каждый год он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем в предыдущем. Сколько экзаменов было на четвёртом курсе? ( 30 б.)

2006 год

1. Сравните числа: и ( 15 б.)

2. Целые числа *a , b, c, d* удовлетворяют условию . Может ли произведение *abcd* равняться 1000? ( 15 б.)

3. Доказать, что любой параллелограмм можно разрезать ровно на 9 равнобедренных треугольников. ( 20 б.)

4. При каких значениях *a* уравнение

(*x*2 + ( 2*a* – 1)*x* – 2*a*)( *x*2 + ( 1 – *a*)*x* – *a*) = 0 имеет ровно три разных корня? ( 20 б.)

5. В бесконечном городе все кварталы – квадраты одного размеры. Велосипедист стартовал из перекрёстка улиц. Через полминуты за ним поехал другой велосипедист. Каждый едет с постоянной скоростью 1 квартал в минуту и на каждом перекрестке улиц поворачивает или направо, или налево. Могут ли они встретиться?

( 30 б.)

2007 год

1. Найдите сумму всех корней уравнения *х*2 + 3 ⎜*х* - 1⎜- 7 = 0

(15 б.)

2. Решите неравенство: . ( 15 б.)

3. Натуральные числа *n и m* таковы, что (4*m – n)(n +m) = 6m2.* Докажите, что *n* кратно *m.* (20 б.)

4. В треугольнике АВС биссектриса АЕ равна отрезку ЕС. Найти углы треугольника АВС, если АС = 2 АВ. ( 20 б.)

5. В вершинах треугольника записаны числа 1, 2 и 3. Затем каждое из чисел одновременно заменили на сумму двух соседних. Эту операцию проделали ещё несколько раз. Могла ли сумма получившихся в итоге трех чисел оказаться равной 3000000?

( 30 б.)

2008 год

1. Докажите равенство:  ( 15 б.)

2. Целые числа *a , b, c, d* удовлетворяют условию . Может ли произведение *abcd* равняться 1000? ( 15 б.)

3. Натуральные числа *n и m* таковы, что (4*m – n)(n +m) = 6m2.* Докажите, что *n* кратно *m.* (20 б.)

4.Пусть ВВ1 и СС1 – высоты остроугольного треугольника АВС с углом А, равным 30°, В2и С2 – середины сторон АС и АВ соответственно. Докажите, что отрезки В1С2 и В2С1 перпендикулярны. ( 20 б.)

5. В бесконечном городе все кварталы – квадраты одного размеры. Велосипедист стартовал из перекрёстка улиц. Через полминуты за ним поехал другой велосипедист. Каждый едет с постоянной скоростью 1 квартал в минуту и на каждом перекрестке улиц поворачивает или направо, или налево. Могут ли они встретиться?

( 30 б.)

УСЛОВИЯ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ, 10 КЛАСС

2001 год

1. Решите систему уравнений

 ( 15 б.)

2. Существуют ли числа вида 66..6, являющиеся кубами целых чисел?

(15 б.)

3. В прямоугольном треугольнике длины медианы и высоты, проведённых к гипотенузе, равны *m* и *h* соответственно. Вычислите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника. ( 20 б.)

4. Докажите, что корни уравнения *ах*3 + *bx*2 + *cx* + *d* = 0 при *a* ≥ *b* ≥ *c* ≥ *d* ≥ 0 не превосходят по модулю 1. ( 20 б.)

5. Докажите, что при любых допустимых значениях *х* и *у* будет верно неравенство . ( 30 б.)

2003 год

1. Решить уравнение:  ( 15 б.)

2. Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме? ( 15 б.)

3. В треугольнике АВС угол при вершине С равен 120°. Докажите, что длина отрезка, который соединяет эту вершину с центром вписанной окружности, равна 2( *р* – АВ), где *р* – полупериметр треугольника АВС. ( 20 б.)

4. Даны квадратные трехчлены f(x) и g(x), старшие коєффициенты которых равны 1. Известно, что f(x) + g(x) имеет два разных корня, и каждый из этих корней является корнем уравнения f – g3 = 0. Докажите, что f = g. ( 30 б.)

5. В правильном пятиугольнике А1А2А3А4А5 выбрали точку М и опустили из неё перпендикуляры МВ1, МВ2,МВ3,МВ4,МВ5 на стороны А1А2 , А2А3, А3А4, А4А5, А1 А5 соответственно (все основания перпендикуляров попали на стороны, а не на их продолжения). Докажите, что А1В1 +А2В2+ А3В3+ А4В4+ А5В5= А2В1+ А3В2+ А4В3+ А5В4+ А1В5 . (30 б.)

2004 год

1. Решить неравенство: (*х*2 – *х* – 2) (15 б.)

2. Известно, что (*a* + *d* + *c*)*с* < 0. Доказать, что *b*2 > 4*ac*. ( 15 б.)

3. В окружность вписан прямоугольный треугольник АВС с гипотенузой АВ. На большем катете ВС взята точка D так, что АС = BD, а точка Е = середина дуги АВ, содержащей точку С. Найти угол DEC. ( 20 б.)

4. Существует ли такое число *х*, что значения выражений  и  – рациональные числа? ( 20 б.)

5. Доказать, что если ; , то . ( 30 б.)

2005 год

1. Сколько решений имеет система уравнений:

( 15 б.)

2. На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника АВС взяли точки М и Р такие, что АС= АМ и ВС = ВР. Докажите, что угол МСР равен 45°. ( 15 б.)

3. Решите уравнение ⎜ *х* ⎜- 2⎜*х* + 1⎜+3⎜*х* +2⎜= 0. ( 20 б.)

4. Докажите, что если *а,b,с* – длины сторон данного треугольника, то при положительном значении *х* выполняется неравенство

*b*2*х*2 + ( *b*2 + *с*2 – *а*2)*х* +*с*2 >0 ( 20 б.)

5. Докажите, что сумма двух простых чисел делится на 12, если их разность равна 2 , а меньшее число больше 3. ( 30 б.)

2006 год

1. Известно, что . Доказать, что *х* + *у* = 1. ( 15 б.)

2. Решить уравнение: . ( 15 б.)

3. Про четырёхугольник ABCD известно, что ∠ BAD = ∠ CDA = 60°, а также ∠ CAD = ∠ CDB. Доказать, что АВ + CD = AD.

( 20 б.)

4. Дискриминант D квадратного трёхчлена Р(*х*) = *х*2 + *рх* + *q* положителен. Сколько корней может иметь уравнение Р(*х*) + Р(*х* + ) = 0? ( 20 б.)

5. Числа 1, 2, 3, …, 25 расставляют в квадратную таблицу 5 × 5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце? ( 30 б.)

2007 год

1. При каких значениях *k* уравнение ( *k* – 1 ) *х*2 + ( *k* + 4) *х* + *k* + 7 = 0

имеет единственный корень? ( 15 б.)

2. Решить неравенство: (*х*2 – *х* – 2) (15 б.)

3. Решите систему уравнений : ( 20 б.)

4. Точка М – середина стороны ВС выпуклого четырехугольника АВСD, ∠ АМD = 120°. Докажите, что АВ + ВС + СD ≥ АD.

( 20 б.)

5. Прямоугольник 7×11 разрезали на квадраты 2×2 и трехклеточные уголки. Сколько всего фигур могло получиться?

2008 год

1. Известно, что . Доказать, что *х* + *у* = 1. ( 15 б.)

2. На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника АВС взяли точки М и Р такие, что АС= АМ и ВС = ВР. Докажите, что угол МСР равен 45°. ( 15 б.)

3. Решите систему уравнений : ( 20 б.)

4. Дискриминант D квадратного трёхчлена Р(*х*) = *х*2 + *рх* + *q* положителен. Сколько корней может иметь уравнение Р(*х*) + Р(*х* + ) = 0? ( 20 б.)

5. Числа 1, 2, 3, …, 25 расставляют в квадратную таблицу 5 × 5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце? ( 30 б.)

(20 б.)

УСЛОВИЯ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ, 11 КЛАСС

2001 год

1. Существуют ли числа вида 22…2 , являющиеся кубами целых чисел?

(15 б.)

2. В выпуклом четырехугольнике АВСD суммы квадратов противоположных сторон равны: АВ2 + СD2 = ВС2 + АD2. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны. ( 15 б.)

3. Решите уравнение х4 + 2х3 – 5х2 – 2х + 1 = 0 ( 20 б.)

4. Докажите, что число - иррациональное. ( 20 б.)

5. Определите наибольшее и наименьшее значение выражения *х*, если ⎜*х* ⎜≤ 1, ⎜*у* ⎜≤ 1. ( 30 б.)

2003 год

1. Для некоторых целых *х* и *у* число 3*х* + 2*у* делится на 23. Докажите, что число 17 *х* + 19 *у* тоже делится на 23. ( 15 б.)

2. Решите уравнение: ( 15 б.)

3.Пусть f(x)= *х*4 – 3*х*3 + 4*х* + 5. Найдите число *а* такое, чтобы при ⎜х - 2⎜< *а* было выполнено ⎜f(x) – f(2)⎜< . ( 20 б.)

4. Дана трапеция АВСD, ВС ⎜⎜АD, E и F – середины сторон АВ и CD соответственно , О – точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что ЕА2 – ЕО2 = FD2 – FO2. ( 20 б.)

5. Найдите целую часть числа

1 +. ( 30 б.)

2004 год

1. Касательная к графику функции *у* = *х*2 пересекает координатные оси ОХ и ОУ в точках А и В так, что ОА = ОВ. Найдите длину отрезка АВ. ( 15 б.)

2. Доказать, что если ( х + , то *х* + *у* = 0.

( 15 б.)

3. Существует ли такое число х, что значение выражений tg x + и ctg x + - целые числа? ( 20 б.)

4. В треугольнике АВС с основанием АС = 8 проведена биссектриса ВL. Площади треугольников АВL и BLC относятся как 3 : 1. Найти биссектрису BL, при которой высота, опущенная из вершины В на основание АС, будет наибольшей. ( 20 б.)

5. Решить систему уравнений:

( 30 б.)

2005 год

1 Решите неравенство: ( 15 б.)

2. При каком значении *а* сумма квадратов корней уравнения *х*2 – *ах* + *а* – 1 = 0 будет наименьшей? ( 15 б.)

3. Пусть *а, в, с, d*  - произвольные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что *а*2 + *в*2 + *с*2 + *d*2 – 2*ав* – 2 *вс* – 2 *сd* – 2 *аd* ≥ - . ( 20 б.)

4. В тетраэдре АВСD все двугранные углы острые, а противолежащие ребра попарно равны. Найдите сумму косинусов всех двугранных углов тетраэдра. ( 20 б.)

5. На доске записаны числа: *а, в, с, d*. Каждую секунду они меняются на числа *а + в, в + с, с + d, d + а.* Через некоторое время снова получились первоначальные числа *а, в, с, d.* Докажите, что *а* = *в* = *с* = *d* = 0. ( 30 б.)

2006 год

1. Функция f(x) имеет вид f(x) = , где *а, b, с, d* – некоторые числа. Известно, что f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3.Чему равно f(3)? ( 15 б.)

2. Доказать, что если cos x ≠ 0, то ⎜⎜≥ 4. ( 15 б.)

3. Отрезок СН – высота прямоугольного треугольника АВС, проведенная к гипотенузе АВ. Точки О1, О2 и О – центры вписанных окружностей треугольников АСН, ВСН, АВС соответственно. Доказать, что СО ⊥ О1О2 и СО = О1О2 ( 20 б.)

4. Существует ли такое натуральное число *а,* что в последовательности *хn* = *n*2 + 2007 *an* + 2006 *a*2  любые два соседних члена взаимно просты? ( 20 б.)

5. В квадрате со стороной 1 расположено 2006 равносторонних треугольников, сумма периметров которых равна 300. Доказать, что по крайней мере три из них имеют общую точку. ( 30 б.)

2007 год

1. Решите уравнение: cos *x* = 0. ( 15 б.)

2. Найти наибольшее целое решение неравенства:

⎜*х*2 – 3*х* - 3⎜>⎜*х*2 + 7*х* - 13⎜ ( 15б.)

3. Найти наименьшее значение выражения , если известно, что

*х*2 – 10 *х* + *у*2 – 2 *у* + 1 = 0 ( 20 б.)

4. Диагонали выпуклого четырехугольника АВСD пересекаются в точке Е. Известно, что площади треугольников АВЕ и DСЕ равны по 1, площадь четырехугольника АВСD не превосходит 4, АD = 3.

Найти ВС. ( 20 б.)

5. В квадрате 1×1 отмечено 9 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется два таких треугольника с вершинами в этих точках площади не более каждый. ( 30 б.)

2008 год

1. Функция f(x) имеет вид f(x) = , где *а, b, с, d* – некоторые числа. Известно, что f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3.Чему равно f(3)? ( 15 б.)

2. Доказать, что если cos x ≠ 0, то ⎜⎜≥ 4. ( 15 б.)

3. Отрезок СН – высота прямоугольного треугольника АВС, проведенная к гипотенузе АВ. Точки О1, О2 и О – центры вписанных окружностей треугольников АСН, ВСН, АВС соответственно. Доказать, что СО ⊥ О1О2 и СО = О1О2 ( 20 б.)

4. . Пусть *а, в, с, d*  - произвольные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что *а*2 + *в*2 + *с*2 + *d*2 – 2*ав* – 2 *вс* – 2 *сd* – 2 *аd* ≥ - . ( 20 б.)

5. На доске записаны числа: *а, в, с, d*. Каждую секунду они меняются на числа *а + в, в + с, с + d, d + а.* Через некоторое время снова получились первоначальные числа *а, в, с, d.* Докажите, что *а* = *в* = *с* = *d* = 0. ( 30 б.)